On désigne par $\mathcal{M}_{n,p}$ l'espace des matrices *réelles* à n lignes et p colonnes ; à tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}$ on associe le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$;

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont dans $\mathbb{R}^n$, on pose $(x|y) = X^{\mathrm{T}}.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\| = \|X\| = \sqrt{(x|x)}$;

Enfin, si A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}$, on pose $N(A) = \sup_{X \neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques questions liées à la résolution approchée d'équations de la forme $AX = B$, où A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}$, B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}$, et X une inconnue de $\mathcal{M}_{p,1}$.

Dans la partie **I**, A est supposée carrée et inversible. Il existe alors une solution unique. Il s'agit de savoir comment est modifiée cette solution quand B subit une variation ΔB. Dans la partie **II**, on étudie le cas d'équations ne possédant pas de solution ; on se contente alors de « pseudo-solutions ».

Partie I

Dans cette partie, A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}$, supposée inversible.

1. Soit X l'unique solution de l'équation $AX = B$, où B est une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}$. Quand B devient $B + \Delta B$, X devient $X + \Delta X$ tel que $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$.

a. Prouver que pour tout élément M de $\mathcal{M}_{n,n}$ et tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$, on a $\|MX\| \leq N(M)\|X\|$.

b. Prouver que si M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,n}$, on a $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

c. Montrer que :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq N(A)N(A^{-1})\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|} \quad \text{et que} \quad \mu(A) = N(A)N(A^{-1}) \geq 1 .$$

2. On pose $A' = A^{\mathrm{T}}A$.

a. Prouver que les valeurs propres de A' sont réelles et qu'il existe une matrice orthogonale P, une matrice diagonale D, telles que $D = P^{-1}A'P$.

b. Soit λ une valeur propre de A' et X_0 un vecteur propre associé. En calculant ${}^tX_0A'X_0$, prouver que $\lambda > 0$.

c. Les valeurs propres de A' étant notées $(\lambda_i')_{1 \leq i \leq n}$ et supposées rangées dans l'ordre croissant, montrer que pour tout Y de $\mathcal{M}_{n,1}$, on a :

$$\|AY\| \leq \sqrt{\lambda_n'}\,\|Y\|, \text{ et qu'il existe } Y_0 \text{ non nul vérifiant } \|AY_0\| = \sqrt{\lambda_n'}\,\|Y_0\| .$$

En déduire la valeur de $N(A)$.

d. Etant données deux matrices carrées M et N de même taille avec M inversible, prouver que MN et NM ont le même polynôme caractéristique.

Frédéric Dupré, classe de MP du lycée Camille Vernet, Valence

En remplaçant A par A^{-1} dans la question précédente, en déduire la valeur de $\mu(A)$ en fonction des valeurs propres de A'.

3. **a.** On suppose A orthogonale. Calculer $\mu(A)$.

b. On suppose A symétrique. Exprimer $\mu(A)$ en fonction des valeurs propres de A.

c. *Application numérique* :

On donne $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\mu(A)$, et déterminer ΔB (avec par exemple $\|\Delta B\| = 1$) de telle sorte que $\dfrac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \mu(A)\dfrac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$ (ce qui prouve que l'inégalité obtenue à la question **1.c.** ne peut être améliorée dans le cas général).

Partie II

Dans cette partie, A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$, B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}$, et on suppose qu'il n'existe aucune matrice X de $\mathcal{M}_{p,1}$ telle que $AX = B$ (équation notée (E) dans la suite). On désigne par Φ_A l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

On appelle pseudo-solution de (E) toute matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}$ telle que :

$$\|AX_0 - B\| = \inf\left\{\|AX - B\|, \quad X \in \mathcal{M}_{p,1}\right\}$$

(ou encore $\|\Phi_A(x_0) - b\| = d(b, \operatorname{Im}\Phi_A)$ avec $d(b, \operatorname{Im}\Phi_A) = \inf\left\{\|\Phi_A(x) - b\|, \quad x \in \mathbb{R}^p\right\}$).

4. **a.** En étudiant la projection orthogonale de b sur $\operatorname{Im}\Phi_A$, prouver l'existence de pseudo-solutions à l'équation (E).

b. On suppose de plus Φ_A injective. Montrer que (E) admet alors une pseudo-solution unique.

c. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. x est pseudo-solution de (E) ;

ii. $\forall y \in \mathbb{R}^p, \quad (\Phi_A(y) | \Phi_A(x) - b) = 0$;

iii. $A^{\mathrm{T}}AX = A^{\mathrm{T}}B$.

5. *Application à la régression linéaire* :

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne n points A_k de coordonnées (x_k, y_k), $1 \leq k \leq n$. Soit D la droite d'équation $y = ax + b$.

On définit, pour $1 \leq k \leq n$, les points H_k de coordonnées $(x_k, ax_k + b)$, et on se propose de déterminer D de façon à ce que $\sum_{k=1}^{n} \|M_k H_k\|^2$ soit minimum.

Montrer que ce problème revient à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $AX = B$ où A, B et X sont trois matrices que l'on explicitera.

À quelle condition sur les points M_k l'application Φ_A est-elle injective ? Déterminer alors la pseudo-solution du système.