INTÉGRATION

Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ (voire dans un espace vectoriel normé de dimension finie).

1. Construction de l'intégrale de Riemann

Le polycopié concernant la construction de l'intégrale figure sur mon site Internet.

Intégration des fonctions en escalier sur un segment. Propriétés de l'intégrale : linéarité, formule de Chasles, positivité, croissance, majoration par l'intégrale de la norme.

Fonctions réglées (fonctions définies ici comme uniformément approchables sur un segment par des fonctions en escalier). Intégrale d'une fonction réglée. Propriétés de l'intégrale des fonctions réglées (propriétés analogues à celles des fonctions en escalier, obtenues par passage à la limite).

Les fonctions continues par morceaux sont réglées.

Aucune théorie des fonctions réglées n'a été faite ; en particulier, je n'ai jamais prouvé que les fonctions réglées sur un segment sont exactement les fonctions qui possèdent en tout point des limites à droite et à gauche. Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux.

2. Autres propriétés de l'intégrale

☞ Une fonction numérique positive continue et d'intégrale nulle est nulle.

☞ Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions réelles, cas d'égalité pour les fonctions continues. J'en déduis l'inégalité pour les fonctions complexes, mais je n'en traite pas le cas d'égalité.

Sommes de Riemann : les subdivisions sont à pas constant dans le nouveau programme. En ce qui concerne le pointage, le programme n'est pas très clair ; je me suis donc offert le luxe de pointer mes subdivisions. La convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale n'est au programme que pour les fonctions continues.

La première formule de la moyenne est hors-programme.

3. Intégrale fonction de sa borne supérieure

☞ Si f est continue par morceaux sur I, continuité de l'application :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

☞ Dérivabilité de F aux points de continuité de f.

Théorème fondamental : Toute fonction continue f sur un intervalle I possède des primitives. Deux primitives diffèrent par une constante. f possède une unique primitive prenant en un point a donné de I une valeur donnée. Représentation intégrale de cette primitive.

Pour toute application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a :

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)\,.$$

4. Intégration par parties et changements de variables

Énoncés classiques.