DÉRIVATION

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Dérivée première en un point

Dérivabilité d'une fonction en un point.
Équivalence avec l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en ce point.
Continuité en a d'une fonction dérivable en a.
Opérations sur les fonctions dérivables
- Linéarité de la dérivation.
- Dérivée d'un produit.
- Dérivée d'une composée.

Fonctions dérivables sur un intervalle, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Accroissements finis

L'inégalité : Si f et g sont continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et vérifient $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ pour tout t de $]a,b[$, alors $\|f(b)-f(a)\| \leq g(b)-g(a)$. Cas particulier où $g(t)=kt$.

Corollaires

☞ « Théorème de la limite de la dérivée » (*ils ont enfin trouvé un nom correct à ce théorème, l'ancienne appellation, théorème de prolongement de la dérivée, étant catastrophique !*) : si f est continue sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I-\{a\}$, et si f' possède une limite finie l en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Caractérisation des fonctions dérivables lipschitziennes.

Cas des fonctions numériques

☞ Théorème de Rolle, des accroissements finis (sous leurs hypothèses classiques : f est continue sur le fermé et dérivable sur l'ouvert).

☞ Application à l'étude du sens de variations d'une fonction dérivable.

3. Dérivée d'une réciproque

Si f est une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si f est strictement monotone, f réalise un homéomorphisme de I sur $f(I)$ (admis).

☞ Sous ces hypothèses, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et, dans ce cas, $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Notion de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I sur $f(I)$ si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des dérivées successives en un point. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle.
Formule de Leibniz. Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

5. Formules de Taylor

☞ Théorème de Taylor avec reste intégrale. Inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème de Taylor-Young (existence en tout point d’un développement limité à l’ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$).

J’ai lourdement insisté sur l’opposition local/global de ces deux résultats.

6. Fonctions convexes

Parties convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Notion de barycentre d'un système de points. Associativité du barycentre. Une partie est convexe si et seulement si tout barycentre de points de C munis de masses positives est dans C.

Principales propriétés (géométriques et différentielles) des fonctions convexes. Inégalités de convexité (en particulier, comparaison des moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique).