Interversions limite-intégrale

Les énoncés de tous les théorèmes qui suivent doivent être pouvoir donnés sans la moindre approximation.
Il va sans dire que ces théorèmes sont admis (à l'exception du théorème de continuité que j'ai prouvé).
Il serait bien que chaque élève ait à étudier une fonction définie par une intégrale.

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire dans un espace normé de dimension finie E).

On suppose que :

i. la suite (f_n) converge simplement sur I vers une certaine fonction f ;

ii. f et les f_n sont continues par morceaux sur I ;

iii. il existe une fonction φ positive et sommable sur I telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I,\ \left\| f_n(t) \right\| \leq \varphi(t)$.

Alors f et les f_n sont sommables sur I et l'on a :

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_n \int_I f_n(t)\mathrm{d}t\,.$$

Théorème (intégration terme à terme) : Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de dimension finie E.

On suppose que :

i. la série $\sum u_n$ converge simplement sur I ;

ii. les u_n sont continues par morceaux sur I ;

iii. la fonction $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ est continue par morceaux sur I ;

iv. les u_n sont intégrables sur I ;

iv. la série $\sum \int_I \left\| u_n(t) \right\| \mathrm{d}t$ est convergente.

Alors S est intégrable sur I et l'on a :

$$\int_I S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\mathrm{d}t\,.$$

Fonctions définies par une intégrale

Théorème (continuité des intégrales à paramètre) : Soit f une fonction définie sur un produit cartésien $I \times A$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et A une partie d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace de dimension finie F.

On suppose que :

i. la fonction $t \mapsto f(t,x)$ (qui sera notée classiquement $f(.,x)$ dans la suite) est continue par morceaux pour tout x de A ;

ii. la fonction $f(t,.)$ est continue pour tout t de I ;

iii. il existe une fonction positive φ sommable sur I telle que $\forall (t,x) \in I \times A,\ \left\| f(t,x) \right\| \leq \varphi(t)$.

On peut alors poser :

$$\forall x \in A,\ F(x) = \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$$

et la fonction F ainsi définie est continue sur A.

Théorème (dérivation sous le signe intégrale) : Soit f une fonction définie sur un produit cartésien $I \times J$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de dimension finie F. On suppose que pour tout x de J, la fonction $f(.,x)$ est continue par morceaux et sommable sur I. On peut alors poser :

$$\forall x \in J,\ F(x) = \int_I f(t,x)\mathrm{d}t\ .$$

On suppose en outre que :

i. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point de $I \times J$;

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(.,x)$ est continue par morceaux sur I pour tout x de J ;

iii. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,.)$ est continue pour tout t de I ;

iv. il existe une fonction positive et sommable φ sur I telle que $\forall (t,x) \in I \times J,\ \left\| \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\| \leq \varphi(t)$.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et l'on a :

$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t\ .$$

N.B. : l'hypothèse iii. ne sert strictement à rien pour dériver sous le signe somme, elle n'apporte que la continuité de la dérivée, mais elle figure dans le programme (comme s'il était important qu'une fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$ plutôt que juste dérivable…).