ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Il n'y a plus d'équations différentielles non linéaires au programme.

1. Étude théorique dans le cas général

Théorème de Cauchy linéaire : Si A est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si B est continue de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système différentiel $X' = AX + B$ possède une unique solution définie sur I et prenant en un point donné de I une valeur donnée (théorème non prouvé cette année).

Application à la détermination de la dimension de l'espace des solutions sur I d'un système homogène $X' = AX$. Système fondamental de solutions.

Connaissant un système fondamental de solutions du système homogène $X' = AX$, résolution du système $X' = AX + B$ par la méthode de variation des constantes.

2. Équations linéaires scalaires

Équations linéaires scalaires du premier ordre avec second membre (personnellement, je ne dissocie généralement pas équation homogène et équation avec second membre ; je préfère multiplier des deux côtés l'équation différentielle $y' + ay = b$ par $e^{\int a}$ pour obtenir directement une dérivée dans le terme de gauche. Quoi qu'il en soit, je ne leur parle pas de la méthode de variation de la constante que je trouve parfaitement inutile dans ce cas).

Équations linéaires scalaires d'ordre n : système linéaire du premier ordre associé, théorème de Cauchy.

Plan vectoriel des solutions d'un système homogène d'ordre 2, wronskien. Méthode de variation des constantes. Cas des équations à coefficients constants (révision du cours de Sup.). Recherche de solutions développables en série entière.

Pour les équations « non résolues », c'est-à-dire de la forme $ay' + by = c$ (ou $ay'' + by' + cy = d$) où a est une fonction qui s'annule sur I, la résolution doit se faire sur des sous-intervalles sur lesquels a ne s'annule pas. Se posent alors des problèmes de recollement de solutions qui peuvent faire de bons exercices de colle…

Aucune théorie sur les changements de variable ou de fonction, mais un changement de variable simple peut être demandé (on en a traité en exercice, et j'ai particulièrement insisté sur la façon de rédiger cela correctement.)

3. Systèmes homogènes à coefficients constants

Étude théorique : Étant donnée une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les solutions du système $X' = AX$ sont les fonctions $t \mapsto \exp(tA).C$ où C est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Résolution pratique des systèmes $X' = AX$:

Si A est diagonalisable et si $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t} X_i$ où les k_i sont des constantes.

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, on la trigonalise et on résout le système à la main.

Dans le cas des systèmes avec second membre, on se débrouille en mettant A sous une forme réduite et en résolvant à la main le système plus simple obtenu.