SÉRIES ENTIÈRES

Rayon de convergence d'une série entière complexe $\sum a_n z^n$.

La série converge absolument pour $|z| < R$, diverge grossièrement (*i.e.* le terme général de la série ne tend pas vers 0) pour $|z| > R$.

Disque (ouvert) et intervalle (ouvert) de convergence. La série entière converge normalement sur tout disque de centre 0 et de rayon r avec $0 \leq r < R$. Continuité de sa somme.

☞ Rayon de convergence d'une somme, d'un produit de Cauchy, de deux séries entières.

Formule de d'Alembert ($R = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, quand cette limite existe, bien sûr !).

☞ $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence. Application à la dérivation terme à terme (à un ordre quelconque) d'une série entière sur son intervalle de convergence. Expression des a_n en fonction des dérivées successives, unicité du développement en série entière.

☞ Développements en série entière des fonctions usuelles.

Les variations autour de la série géométrique donnent la plupart des autres développements (en particulier celui des fractions rationnelles). Pour la série du binôme $(1+x)^\alpha$ *, je ne raisonne pas de manière tout à fait standard : je pars du résultat présumé (la série dont les coefficients sont ceux du développement limité) et prouve qu'elle est solution de la même équadif que* $(1+x)^\alpha$ *.*

Pour gagner un peu de temps, je n'ai pas parlé de l'utilisation d'une équation différentielle pour développer une fonction en série entière, ou, inversement, de l'utilisation des séries entières pour intégrer une équation différentielle. Ces choses sont renvoyées au cours sur les équadifs.

Ajouter, à partir de mercredi :

SÉRIE GÉNÉRATRICE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE ENTIÈRE.

Si X est une variable aléatoire à valeurs entières, sa série génératrice est la série entière $\sum P(X = n)t^n$; celle-ci possède un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et sa somme est continue en 1.

La loi de X est entièrement donnée par sa série génératrice.

Série génératrice d'une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Séries génératrices des lois usuelles.

En notant G_X la somme de la série génératrice, X possède une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1 et dans ce cas, $\mathrm{E}(X) = G_X{}'(1)$. De la même façon, X possède une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas, $\mathrm{V}(X) = G_X{}''(1) + G_X{}'(1) - (G_X{}'(1))^2$.