SÉRIES

Les séries étudiées sont à termes réels ou complexes.

1. Convergence des séries

Séries. Séries convergentes, divergentes, somme d'une série convergente.
Équivalence suite - série (l'étude d'une suite (u_n) est équivalente à l'étude de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$).
Opérations élémentaires sur les séries convergentes.

2. Séries de réels positifs

Une telle série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si tel n'est pas le cas, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

☞ Règles de comparaison : majoration, équivalent.

☞ Théorème de comparaison avec une intégrale ; les intégrales impropres n'étant plus vues en Sup', l'énoncé devient : pour f positive continue décroissante tendant vers 0, la série $\sum\left[\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right]$ converge. Par suite, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite d'intégrales $\left(\int_{a}^{n} f(t)dt\right)$ a une limite finie. Séries de Riemann (les séries de Bertrand ne figurent pas explicitement au programme, on les a donc vues en exercice sur des exemples).

3. Absolue convergence

☞ Séries absolument convergentes. Leur convergence dans le cas réel, puis dans le cas complexe.

4. Équivalent de Stirling

5. Règle de d'Alembert

☞ Comparaison à une série géométrique grâce à $\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

Les règles de Cauchy ($\lim\sqrt[n]{|u_n|}$) et de Raabe-Duhamel (qui consiste à faire une comparaison avec une série de Riemann grâce à un développement limité de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$) sont hors programme.

Pour les colles à partir de mercredi :

6. Théorème des séries alternées

☞ Toute série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant est convergente.
Séries de Riemann alternées.
Pour une série alternée pour laquelle on n'a pas *a priori* la décroissance de $(|u_n|)$, on recherche en général un équivalent de u_n moins son équivalent principal.