XMP 2021-2022 **COLLE N°18**

(Semaine du lundi 7 février)

ESPACES PROBABILISÉS

Notion de tribu sur un ensemble Ω.

Opérations ensemblistes élémentaires sur les éléments d'une tribu (les évènements). Systèmes complets d'évènements.

Si Ω est au plus dénombrable, la tribu choisie est, sauf mention du contraire, la tribu discrète $\mathcal{P}(\Omega)$.

Espaces probabilisables.

Notion de probabilité sur un espace probabilisable : c'est une application à valeurs dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega)=1$ et vérifiant l'axiome de σ-additivité.

Propriétés calculatoires élémentaires sur les probabilités.

Théorèmes de la limite monotone : si (A_n) est une suite d'évènements croissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \underset{n\infty}{\to} P(\bigcup_k A_k)$. Si la suite (A_n) décroît, alors $P(A_n) \underset{n\infty}{\to} P(\bigcap_k A_k)$.

Évènements négligeables, presque sûrs.

Formule des probabilités totales.

Si Ω est au plus dénombrable, une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la donnée d'une famille de réels positifs $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$, sommable de somme 1, telle que $P(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Probabilité conditionnelle P_B sachant B où B est un évènement de probabilité non nulle. Elle définit une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$.

Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.

Évènements 2 à 2 indépendants, évènements mutuellement indépendants.

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ est une application X de Ω dans un certain ensemble E tel que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable (c'est-à-dire fini ou dénombrable) et telle que $\forall\, x \in X(\Omega),\ \overset{-1}{X}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Loi d'une variable aléatoire discrète.

Notation $(X = x)$, $(X > x)$ et autres du même type.

Couples de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales.

Variables aléatoires indépendantes, familles de variables mutuellement indépendantes.

Si $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1,\dots,X_p)$ et $g(X_{p+1},\dots,X_n)$ sont indépendantes (admis).

Lois usuelles : loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique (présentée comme loi du rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p), loi de Poisson.

Caractérisation de la loi géométrique comme loi sans mémoire : $P(X > k+n \mid X > n) = P(X > k)$.

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si pour tout n, X_n suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n,p_n)$ avec $np_n \underset{n\infty}{\to} \lambda$, alors $P(X_n = k) \underset{n\infty}{\to} \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Interprétation comme loi des événements rares.

Espérance et variance n'ont pas encore été traitées.