Avant le cours de probas, j'ai distribué deux polycopiés à mes élèves : le premier sur la dénombrabilité, le second sur les familles sommables. Ces deux notions figurent désormais au programme.

La théorie des familles sommables étant délicate, j'ai repris au tableau les principaux points de mon poly en disséquant les différents théorèmes et en redéveloppant les exemples.

Si vous le souhaitez, vous pouvez sur des cas simples tester la compréhension du théorème de sommation par paquets, ainsi que les différentes façons de sommer une suite double.

Peuvent se rajouter à cette colle quelques exercices de dénombrement dans l'esprit du programme de MPSI.

ESPACES PROBABILISÉS

Notion de tribu sur un ensemble Ω.

Opérations ensemblistes élémentaires sur les éléments d'une tribu (les évènements). Systèmes complets d'évènements.

Si Ω est au plus dénombrable, la tribu choisie est, sauf mention du contraire, la tribu discrète $\mathcal{P}(\Omega)$.

Espaces probabilisables.

Notion de probabilité sur un espace probabilisable : c'est une application à valeurs dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega)=1$ et vérifiant l'axiome de σ-additivité.

Propriétés calculatoires élémentaires sur les probabilités.

Théorèmes de la limite monotone : si (A_n) est une suite d'évènements croissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \underset{n\infty}{\to} P(\bigcup_k A_k)$. Si la suite (A_n) décroît, alors $P(A_n) \underset{n\infty}{\to} P(\bigcap_k A_k)$.

Évènements négligeables, presque sûrs.

Formule des probabilités totales.

Si Ω est au plus dénombrable, une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la donnée d'une famille de réels positifs $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$, sommable de somme 1, telle que $P(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Probabilité conditionnelle P_B sachant B où B est un évènement de probabilité non nulle. Elle définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.

Évènements 2 à 2 indépendants, évènements mutuellement indépendants.