ALGÈBRE EUCLIDIENNE

Tous les espaces envisagés sont **réels**, la notion de produit scalaire hermitien n'est plus au programme.
Attention, les modifications de programme ont été importantes dans ce chapitre !

1. Espaces préhilbertiens (réels)

Produits scalaires réels, exemples les plus classiques.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité, norme euclidienne associée au produit scalaire.

Théorème de Pythagore.

☞ Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors E est somme directe de F et de son orthogonal, et le double orthogonal de F est F. Projection orthogonale sur F.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et si x est un élément de E quelconque, la distance de x à F est atteinte en un point unique de F qui est le projeté orthogonal de x sur F.

2. Espaces euclidiens

Existence de bases orthonormées. Théorème de la “base orthonormée incomplète”. Existence d'un supplémentaire orthogonal pour tout sous-espace de E.

☞ Matrice de passage d'une base orthonormée à une autre, matrices orthogonales, groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal.

Définition d'une isométrie. Matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.

☞ Classification des isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens orientés.

Endomorphismes symétriques. Exemple des projecteurs orthogonaux. Caractérisation par leur matrice dans une (toute) base orthonormée.

☞ Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles.