XMP 2021-2022 **COLLE N°14**

(Semaine du lundi 10 janvier)

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

A priori, l'espace de travail est de dimension finie. Je me contente de dire dans un dernier paragraphe quelles sont les notions et théorèmes qui restent valables en dimension quelconque.

1. Sous-espaces stables

Caractérisation matricielle d'un endomorphisme stabilisant un sous-espace F de E. Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Caractérisation matricielle d'un endomorphisme stabilisant $F_1, F_2, \dots, F_p$ avec $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Déterminant d'un tel endomorphisme.

2. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Définition des valeurs propres (leur ensemble forme le spectre de u), des vecteurs propres (0 n'en est pas un par convention), des sous-espaces propres.

Une somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Polynôme caractéristique (il est égal à $\det(XId_E - u)$, c'est désormais officiel). Les valeurs propres de u sont les racines dans $\mathbb{K}$ de P_u.

La dimension d'un espace propre est plus petite que la multiplicité de la valeur propre dans P_u.

Définitions équivalentes d'un endomorphisme diagonalisable.

<u>Théorème</u> : u est diagonalisable si et seulement si P_u est scindé dans et si la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre dans P_u. En particulier, si P_u est scindé dans $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, u est diagonalisable.

Valeurs propres d'une matrice carrée (ce sont les scalaires λ pour lesquels il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = \lambda X$). Polynôme caractéristique, matrices diagonalisables.

Endomorphismes et matrices trigonalisables. u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Pratique de la trigonalisation.

Adaptation de tous les résultats précédents en termes de réduction des matrices. Ne pas hésiter à faire réduire une matrice de taille raisonnable à la forme diagonale ou triangulaire.

3. Polynômes d'endomorphismes et de matrices

Règles de calculs sur les polynômes d'un endomorphisme. Polynômes annulateurs.

Polynôme minimal (si l'idéal des polynômes annulateurs ne se réduit pas à $\{0\}$, ce qui est le cas en dimension finie).

Si λ est valeur propre de u, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. Les valeurs propres sont donc des racines de tout polynôme annulateur, et ce sont les racines du polynôme minimal (quand il existe).

Théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, alors :

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

Généralisation à plus de deux polynômes deux à deux premiers entre eux.

Généralisation à une famille finie de polynômes premiers entre eux deux à deux.

Théorème de Cayley-Hamilton (preuve par les matrices compagnons et, pour les matrices complexes, à partir de la forme triangulaire).

Pour que u soit diagonalisable, il faut et il suffit que u possède un polynôme annulateur scindé et dont toutes les racines sont simples.

Endomorphismes nilpotents, indice de nilpotence. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il possède dans une bonne base une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.

Théorème de décomposition spectrale : si u possède un polynôme annulateur scindé, alors E est somme de sous-espaces stables par u sur lesquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent (étrangetés du programme : le mot « sous-espaces caractéristiques » n'est pas prononcé ; évidemment, ce résultat n'est autre que la décomposition de Jordan-Dunford, mais sans lui en donner le nom, et l'écriture $u = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et d et n commutent est hors-programme ! Et encore moins son unicité, bien sûr.).

Interprétation matricielle de la décomposition spectrale.

4. Cas de la dimension quelconque

Je me suis contenté de lister les notions et résultats qui subsistent : valeurs propres, vecteurs propres, une somme d'espaces propres distincts est directe, toute valeur propre est racine d'un éventuel polynôme annulateur, lemme des noyaux.