Reprendre le programme précédent :

ALGÈBRE LINÉAIRE

1. Révisions d'Algèbre linéaire, généralités

Structure d'espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

Sous-espaces vectoriels, somme et somme directe de sous-espaces. Sous-espace engendré par une partie.

Familles libres, liées, bases.

Applications linéaires. Noyau, image d'une application linéaire.

Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions (linéaires !) à une famille finie d'espaces supplémentaires (ou par la donnée des images des vecteurs d'une base). Exemples des projecteurs, des symétries.

Si u est linéaire de E dans F, et si $\ker u$ possède des supplémentaires, alors u induit un isomorphisme de n'importe quel supplémentaire de $\ker u$ sur $\operatorname{Im} u$.

Espace $\mathcal{L}(E,F)$. Algèbre $\mathcal{L}(E)$, groupe linéaire.

Hyperplans (sous-espaces admettant une droite pour supplémentaire). Tout hyperplan est noyau d'une forme linéaire non nulle, et deux formes linéaires possédant même noyau sont proportionnelles. Ce sont les seuls résultats de dualité au programme.

2. Cas de la dimension finie

Existence de bases, toutes les bases ont même cardinal ; si n est ce cardinal commun, toute famille libre (resp. génératrice) possède au plus (resp. au moins) n éléments, et si elle en possède n, c'est une base (ces résultats ont été redémontrés).

Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite (on peut extraire une base de toute famille génératrice, résultat rappelé mais non prouvé).

Sous-espace d'un espace de dimension finie.

Relation de Grassmann : $\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$

Des sous-espaces dont la somme est directe sont supplémentaires si et seulement si la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de E.

Rang d'une famille de vecteurs.

Théorème du rang, et conséquences (si E et F sont de dimension finie avec égalité des dimensions, il y a équivalence, pour u linéaire de E dans F, entre son injectivité et sa surjectivité).

Polynômes d'interpolation de Lagrange.