CALCUL DIFFÉRENTIEL

1. On désigne par f une fonction numérique différentiable au point $(0,-1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(0,-1,1)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1,1)=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1,1)=-1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,-1,1)=1$. Calculer $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\tan t,-\cos t,\sqrt{1+t})}{f(\ln(1+t),-1+\sin t,1)}$.

---

2. **a.** Déterminer la différentielle en tout point de l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z\mapsto \dfrac{1}{z}$.

b. Déterminer la différentielle de l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $A\mapsto \det A$.

---

3. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $(x,y)\mapsto P(x+\mathrm{i}y)$. Prouver que f est une fonction harmonique, c'est-à-dire que l'on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

---

4. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire d'une norme vérifiant :

$$\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\|\le\|A\|\times\|B\|.$$

On considère l'application $f : A\mapsto A^{-1}$ de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

a. Justifier que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est bien un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Prouver, pour $\|H\|<1$, la convergence de la série $\sum(-1)^n H^n$. Que vaut sa somme ?

c. Prouver que f est différentiable en la matrice I_n et donner $\mathrm{d}f(I_n).H$.

d. Calculer les dérivées partielles de f en la matrice I_n dans les directions de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Retrouver alors la valeur de $\mathrm{d}f(I_n)$.

e. Utiliser le résultat précédent pour calculer $\mathrm{d}f(A)$, A étant un élément quelconque de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

---

5. **a.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Donner, avec des quantificateurs, la définition de la continuité de f au point $(0,0)$, puis celle de « f est différentiable en $(0,0)$ ».

On considère la fonction définie par $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

b. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

c. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

d. Prouver que les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et son distinctes.

---

6. **a.** Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=x^2y-xz$.

b. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xf(x,y)$.

---

7. Chercher les extrema des fonctions suivantes :

a. $f(x,y)=x^2+y^2+axy$ avec $a=1$ puis $a=4$.

b. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

c. $f(z)=|\cos z|$ pour $z\in\mathbb{C}$.

d. Soit $f(x,y)=(x^2-y)(3x^2-y)$. Prouver que la restriction de f à toute droite passant par O possède un minimum en O, mais que f ne possède pas de minimum en O. Expliquer ce paradoxe.

(8.) Identité d'Euler :

Une fonction f, définie sur un cône U (c'est-à-dire une partie U d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E telle que $\forall x\in U,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda x\in U$), est dite a-homogène si pour tout x de U et tout réel strictement positif λ, on a $f(\lambda x)=\lambda^a f(x)$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un cône ouvert U. Prouver que f est a-homogène sur U si et seulement si l'on a $\mathrm{d}f(x).x=a\,f(x)$ pour tout x de U (on pourra avant toute chose considérer la fonction $g(t)=f(tx)-t^a f(x)$, et calculer sa dérivée).

---

9. On définit l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ suivant : $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x>0,\ y>0\right\}$, et l'on cherche les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{y}{x^2}\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{1+xy}+\dfrac{\alpha}{x}\end{cases}$$

a. Déterminer, grâce à un théorème du cours, la seule valeur du paramètre α pour laquelle f peut exister.

b. Donner, pour cette valeur de α, une solution du système proposé.

c. Donner *toutes* les solutions du système.

---

10. On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles, a étant un réel donné :

$$(E)\ :\ \frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_2}=a\,.$$

Pour cela, on pose, étant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$g(u,v)=f\left(\frac{u+v}{2},\frac{v-u}{2}\right).$$

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur g pour que f soit solution de (E).

b. En déduire la forme générale des solutions de (E).

---

11. On considère le « paraboloïde hyperbolique » d'équation $z=xy$.

a. Déterminer l'équation du plan tangent à ce paraboloïde au point (a,b,ab).

b. Déterminer l'intersection de ce plan tangent avec le paraboloïde.

---

12. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f:U\to\mathbb{C}$. On dit que f est *holomorphe* au point $a\in U$ si $\displaystyle\lim_{h\to 0,h\in\mathbb{C}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$. Pour $z=x+iy\in U$, on note $f(z)=P(x,y)+\mathrm{i}Q(x,y)$, P et Q étant à valeurs réelles.

Prouver que f est holomorphe en a si et seulement si f est différentiable en a avec les conditions (dites « de Cauchy », encore lui !) : $\dfrac{\partial P}{\partial x}(a)=\dfrac{\partial Q}{\partial y}(a)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}(a)=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}(a)$.

13.* Prouver, en adaptant la preuve de l'unicité de la différentielle, qu'une norme n'est jamais différentiable en 0.