CALCUL DIFFÉRENTIEL

1. On désigne par f une fonction numérique différentiable au point $(0,-1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(0,-1,1)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1,1)=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1,1)=-1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,-1,1)=1$. Calculer $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\tan t,-\cos t,\sqrt{1+t})}{f(\ln(1+t),-1+\sin t,1)}$.

Notons, pour bien voir les choses, $A(t)=(\tan t,-\cos t,\sqrt{1+t})$. *Quand* t *tend vers 0,* $A(t)\to(0,-1,1)=A_0$. *Les coordonnées de l'accroissement* $A_0A(t)$ *sont* $(\tan t,-\cos t+1,\sqrt{1+t}-1)$ *: la première est en* $\dfrac{t^3}{3}$*, la seconde en* $\dfrac{t^2}{2}$ *et la troisième en* $\dfrac{t}{2}$*, de sorte que si l'on choisit la norme infinie sur* $\mathbb{R}^3$*, on a pour* t *assez petit* $\left\|A_0A(t)\right\|\sim\dfrac{|t|}{2}$ *: tout ce calcul préliminaire a pour but de déterminer l'ordre de grandeur de* $\left\|A_0A(t)\right\|$ *afin de comprendre ce que signifie* $\mathrm{o}\left(\left\|A_0A(t)\right\|\right)$ *dans les développements limités que l'on effectuera. Ici,* $\mathrm{o}\left(\left\|A_0A(t)\right\|\right)=\mathrm{o}(t)$.

Regardons maintenant le numérateur de la quantité dont on cherche la limite : le cours nous dit que, f étant différentiable au point $(0,-1,1)$*, sa différentielle y est la forme linéaire :*

$$(a,b,c)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1,1)\,a+\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1,1)\,b+\frac{\partial f}{\partial z}(0,-1,1)\,c=2a-b+c\,.$$

Ainsi, quand t *tend vers 0, il vient :*

$$\begin{aligned}f(\tan t,-\cos t,\sqrt{1+t})-f(0,-1,1)&=2(\tan t-0)-(-\cos t+1)+(\sqrt{1+t}-1)+\mathrm{o}\left(\left\|A_0A(t)\right\|\right)\\&=2\frac{t^3}{3}+\mathrm{o}(t^3)+\frac{t^2}{2}\,\mathrm{o}(t^2)+\frac{t}{2}+\mathrm{o}(t)+\mathrm{o}(t)\\&=\frac{t}{2}+\mathrm{o}(t)\\&\sim\frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Comme cet exercice est essentiel pour tester votre compréhension de la notion, je vous laisse le soin d'effectuer le même raisonnement pour évaluer le dénominateur et, finalement, pour calculer la limite demandée.

---

2. **a.** Déterminer la différentielle en tout point de l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z\mapsto\dfrac{1}{z}$.

On revient pour ce faire à la définition. Soit a *un point de* $\mathbb{C}^*$ *et* h *assez petit pour que* $a+h\neq 0$. *Alors :*

$$\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}=-\frac{h}{a(a+h)}=-\frac{h}{a^2}\frac{1}{1+\dfrac{h}{a}}=-\frac{h}{a^2}+\frac{h^2}{a^3}+\mathrm{o}(h^2)=-\frac{h}{a^2}+\mathrm{o}(h)\,.$$

L'application $h\mapsto-\dfrac{h}{a^2}$ *étant linéaire, on en déduit, par définition même, que* $z\mapsto\dfrac{1}{z}$ *est différentiable en* a*, et que sa différentielle y est l'application* $h\mapsto-\dfrac{h}{a^2}$.

b. Déterminer la différentielle de l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $A\mapsto\det A$.

Tout d'abord, il est à noter que l'application déterminant est polynômiale. Il en résulte qu'elle est trivialement de classe $\mathcal{C}^1$ et donc, d'après le théorème fondamental du cours, différentiable en tout point. Reste à déterminer sa différentielle en un point A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour cela, on va calculer ses dérivées partielles en A.

Soit $E_{i,j}$ une matrice élémentaire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La dérivée partielle en A du déterminant selon la « i-j ième variable » est :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\det(A+hE_{i,j})-\det A}{h}\,.$$

Mais, en imaginant le calcul du déterminant de $A+hE_{i,j}$ par développement par rapport à la i-ème ligne, on voit que $\det(A+hE_{i,j})=\det A+hD_{i,j}$ où $D_{i,j}$ est le cofacteur de A en position i-j. Finalement :

$$\frac{\partial\det}{\partial_{i,j}}(A)=\lim_{h\to 0}\frac{\det(A+hE_{i,j})-\det A}{h}=D_{i,j}\,.$$

La formule fondamentale qui donne la différentielle à partir des dérivées partielles permet alors d'affirmer que :

$$\mathrm{d}(\det)(A)=\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\\ H=[h_{i,j}]\mapsto\sum_{i,j}h_{i,j}D_{i,j}\end{cases}$$

On peut condenser cette formule de la façon suivante : peut-être vous souvenez-vous que si A et B sont deux matrices carrées, alors $\sum_{i,j}a_{i,j}b_{i,j}=\mathrm{tr}\,({}^tAB)$. En notant $\tilde{A}$ la comatrice de A, il vient donc :

$$\mathrm{d}(\det)(A).H=\mathrm{tr}\,({}^t\tilde{A}H)$$

---

4. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire d'une norme vérifiant :

$$\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\|\leq\|A\|\times\|B\|.$$

On considère l'application $f:\ A\mapsto A^{-1}$ de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

a. Justifier que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est bien un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})=\left\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \det M\neq 0\right\}=\overset{-1}{\det}(\mathbb{R}^*)$ *est l'image réciproque d'un ouvert (ici $\mathbb{R}^*$) par le déterminant qui est continu, c'est donc bien un ouvert.*

b. Prouver, pour $\|H\|<1$, la convergence de la série $\sum(-1)^nH^n$. Que vaut sa somme ?

Il s'agit d'une série d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie, sa convergence absolue entrainera sa convergence. Or, puisque l'on dispose d'une norme d'algèbre, $\left\|(-1)^nH^n\right\|\leq\left\|H\right\|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente puisque $\left\|H\right\|<1$.

On calcule $(I_n+H)\sum_{k=0}^{N}(-1)^kH^k=I_n+(-1)^NH^{N+1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}I_n$. Il en résulte, en passant à la limite et en utilisant la continuité du produit matriciel, que $(I_n+H)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kH^k=I_n$.

On prouve de même que $(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kH^k)(I_n+H)=I_n$, d'où $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kH^k=(I_n+H)^{-1}$.

c. Prouver que *f* est différentiable en la matrice I_n et donner $\mathrm{d}f(I_n).H$.

Pour H assez petit ($\|H\| < 1$), $(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k = I_n - H + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k H^k$. *Or :*

$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k H^k \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \left\| H^k \right\| = \frac{\|H\|^2}{1 - \|H\|} = \mathrm{o}(\|H\|) \ ;$$

On a donc écrit $(I_n + H)^{-1} = I_n^{-1} - H + \mathrm{o}(\|H\|)$ *: par définition, f est différentiable en la matrice* I_n *et* $\mathrm{d}f(I_n).H = -H$

d. Calculer les dérivées partielles de f en la matrice I_n dans les directions de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Retrouver alors la valeur de $\mathrm{d}f(I_n)$.

Pour $i \neq j$, *on voit facilement que* $(I_n + \lambda E_{i,j})^{-1} = I_n - \lambda E_{i,j}$ *et donc que* $\dfrac{(I_n + \lambda E_{i,j})^{-1} - I_n}{\lambda} \underset{\lambda \to 0}{\to} - E_{i,j}$.
Par définition, la dérivée partielle de f en I_n *dans la direction de* $E_{i,j}$ *est donc* $-E_{i,j}$.

Pour $i = j$, $I_n + \lambda E_{i,j}$ *est une matrice diagonale qui n'est pas très difficile à inverser. Alors, compte-tenu du développement limité* $\dfrac{1}{1+\lambda} = 1 - \lambda + \mathrm{o}(\lambda)$, *on trouve encore dans ce cas que* $\dfrac{(I_n + \lambda E_{i,j})^{-1} - I_n}{\lambda} \underset{\lambda \to 0}{\to} - E_{i,j}$.

Mais f est de classe $\mathcal{C}^1$ *car pour* $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, *la formule de la comatrice prouve que l'expression de* A^{-1} *fait intervenir des fractions rationnelles des coefficients de A à dénominateur (le déterminant) ne s'annulant pas. On retrouve ainsi, grâce au théorème fondamental du cours, que f est différentiable en l'identité et (puisque l'on connaît la valeur des dérivées partielles en ce point), que :*

$$\mathrm{d}f(I_n).H = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial_{i,j}}(I_n) h_{i,j} = -\sum_{i,j} h_{i,j} E_{i,j} = -H \quad .$$

e. Utiliser le résultat précédent pour calculer $\mathrm{d}f(A)$, A étant un élément quelconque de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Pour H assez petit, on obtient grâce à une mise en facteur de A :

$$(A + H)^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1} A^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k \right] A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1} \ .$$

On prouve alors, comme on l'a fait pour la matrice I_n, *que* $\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1} \right\| = \mathrm{o}(\|H\|)$ *et l'on en conclut, puisque le terme* $A^{-1}HA^{-1}$ *dépend linéairement de H, que* $df(A).H = -A^{-1}HA^{-1}$.

---

5. **a.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Donner, avec des quantificateurs, la définition de la continuité de f au point $(0,0)$, puis celle de « f est différentiable en $(0,0)$ ».

On considère la fonction définie par $f(x,y) = xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

b. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Bien évidemment, le seul problème de continuité de f se pose à l'origine car, sur $\mathbb{R}^2 - \{O\}$, *f est le quotient de deux fonctions polynômes (donc continues) de dénominateur ne s'annulant pas.*

Par une majoration brutale, il vient :

$$\left|f(x,y)\right| = \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \le \left|xy\right| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 = f(0,0)\,.$$

c. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Cette fois encore, f est trivialement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 - \left\{(0,0)\right\}$.

En un point (x,y) autre que l'origine, les calculs de dérivées partielles se font de manière usuelle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Là encore, une majoration brutale permet de voir que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

Reste à voir si f possède une dérivée partielle selon x à l'origine, et si celle-ci est nulle. Si tel est le cas, on pourra en conclure que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle y est continue. Les calculs étant clairement analogues pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, on en conclura que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \underset{x\to 0}{\to} 0\,.$$

*On en déduit, **par définition même**, que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. On a alors vu plus haut comment conclure.*

d. Prouver que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et son distinctes.

Soyons bien organisés : si $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe, c'est la limite suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}\,.$$

Mais, en un point autre que l'origine, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{2x^2 2y}{(x^2+y^2)^2}$ et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$.

Finalement, en reportant dans la limite à déterminer, on obtient que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.

Cette fois encore, je vous laisse faire vous-même en guise d'entrainement le raisonnement permettant de calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ et vous devriez trouver -1. Comme quoi « les dérivées croisées » ne sont pas toujours égales, comme l'affirment pourtant une certaine catégorie de personnes que je ne nommerai pas…

---

6. **a.** Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x^2y - xz$.

Attention à ne pas rédiger cela « à la physicien », on est ici en maths ! En effet, voici comment les physiciens rédigent ce genre de truc (vous avez sûrement déjà rencontré cela) :

« $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x^2y - xz \Rightarrow$ (en primitivant par rapport à x) $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3}y - \frac{x^2}{2}z + g(y,z)$ ». *Problème : où sont les justifications ? Où est la réciproque ?*

Des maths, maintenant : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=x^2y-xz \Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y,z)-\dfrac{x^3}{3}y+\dfrac{x^2}{2}z\right]=0$;

la fonction $f(x,y,z)-\dfrac{x^3}{3}y+\dfrac{x^2}{2}z$ *a une dérivée selon x identiquement nulle sur* $\mathbb{R}^3$ ***convexe****, on sait alors d'après le cours que cela équivaut à l'existence d'une fonction g de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *telle que :*

$$\forall (y,z)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)-\frac{x^3}{3}y+\frac{x^2}{2}z=g(y,z)\ .$$

b. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xf(x,y)$.

Cette équation aux dérivées partielles ressemble à une équation linéaire du premier ordre, on va donc adapter la méthode de résolution de ces dernières :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xf(x,y) &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-xf(x,y)=0\\ &\Leftrightarrow \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-xf(x,y)\Big)\mathrm{e}^{-xy}=0\\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x,y)\mathrm{e}^{-xy}\Big]=0\\ &\underset{\mathbb{R}^2\text{ convexe}}{\Leftrightarrow} \exists\, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ telle que } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\mathrm{e}^{-xy}=g(x).\end{aligned}$$

---

7. Chercher les extrema des fonctions suivantes :

a. $f(x,y)=x^2+y^2+axy$ avec $a=1$ puis $a=4$.

On recherche les points critiques de f en résolvant le système :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2x+ay=0\\ 2y+ax=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=0 \ \text{ et ce dans les deux cas } a=1 \text{ et } a=4.$$

Finalement, l'origine est le seul point critique et $f(0,0)=0$.

Mais pour $a=1$, $f(x,y)=x^2+y^2+xy=(x+\dfrac{y}{2})^2+\dfrac{3}{4}y^2\geq 0$, *f présente donc un minimum (global) à l'origine. En revanche, pour* $a=4$, $f(x,y)=(x+2y)^2-3y^2$ *et donc* $f(-2y,y)=-3y^2\leq 0$ *ce qui prouve que f ne présente pas de minimum à l'origine (ne voyez surtout pas mes calculs comme astucieux, ce ne sont que des mises sous forme canonique de polynômes du second degré et c'est ça qui permet d'étudier leur signe !).*

b. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

On recherche les points critiques de f en résolvant le système :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=y\\ y^2=x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y^4=y\\ y^2=x\end{cases}$$

On a donc deux points critiques : $O=(0,0)$ *et* $A=(1,1)$.

Observons la formule donnant $f(x,y)$ *quand x et y sont proches de 0. En général, le terme prépondérant sera celui du second degré (ici* $-3xy$ *) et c'est lui qui déterminera le signe de* $f(x,y)$ *: par exemple, pour x assez petit,* $f(x,x)=-3x^2+2x^3<0$ *. Mais si ce terme saute, il n'est plus prépondérant ! Notamment,* $f(x,0)=x^3>0$

pour x positif assez petit. Finalement, on a dans tout voisinage de $(0,0)$ *des points dont le f est positif et d'autres dont le f est négatif : f ne présente pas d'extremum, même local, en* $(0,0)$.

Au tour du point $A=(1,1)$. *On doit étudier, pour h et k assez petits, le signe de* $f(1+h,1+k)-f(1,1)$. *Mais* $f(1+h,1+k)-f(1,1)=\ldots=3(h^2+k^2-hk+h^3+k^3)$ *: et là j'avoue que, sans indication, vous avez peu de chances de trouver. Avec mes excuses ! Passons en polaires en posant* $r=\sqrt{h^2+k^2}$ *, ainsi dire que h et k tendent vers 0 revient à dire que la seule variable r tend vers 0. Alors :*

$$f(1+h,1+k)-f(1,1)=3r^2(1-\cos\theta\sin\theta+r\cos^3\theta+r\sin^3\theta)\,.$$

Maintenant, il reste à réfléchir au signe du terme entre parenthèse pour r petit… je vous laisse faire et vous donnerai la réponse la prochaine fois.

c. $f(z)=|\cos z|$ pour $z\in\mathbb{C}$.

Attention, l'expression d'un module cache une racine carrée, et donc des problèmes de dérivation dès que ce qui figure sous la racine s'annule ! Ici, ce n'est pas vraiment un problème puisque, par positivité, les points d'annulation de f sont des minimums globaux de f, et donc il n'y a pas besoin de théorèmes de calcul différentiel pour les étudier. Autre manière de court-circuiter le problème : dire que f étant positive, les extrema de f sont les mêmes que ceux de f^2 . *C'est avec cette dernière remarque que l'on traitera l'exercice. Alors,, pour* $z=x+\mathrm{i}y$, $g(x,y)=|\cos z|^2=|\cos(x+\mathrm{i}y)|^2=|\cos x\cos(\mathrm{i}y)-\sin x\sin(\mathrm{i}y)|^2=\cos^2x\,\mathrm{ch}^2y+\sin^2x\,\mathrm{sh}^2y$. *La recherche des points critiques conduit donc à la résolution du système :*

$$\begin{cases}-2\cos x\sin x\,\mathrm{ch}^2y+2\cos x\sin x\,\mathrm{sh}^2y=0\\ 2\cos^2x\,\mathrm{ch}\,y\,\mathrm{sh}\,y+2\sin^2x\,\mathrm{sh}\,y\,\mathrm{ch}\,y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos x\sin x=0\\ \mathrm{ch}\,y\,\mathrm{sh}\,y=0\end{cases}\Leftrightarrow\left\{x=k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\text{ et }y=0\right.$$

Les points critiques correspondant à z multiple impair de $\dfrac{\pi}{2}$ *correspondent aux annulations de f, ce sont des minima globaux. Quant aux points critiques de la forme* $z=k\pi$ *, ce sont des points en lesquels f prend la valeur 1. Mais ces points ne représentent pas des extrema de f : en effet, pour x réel proche de* $k\pi$ *mais différent de* $k\pi$ *,* $|f(x)|^2=\cos^2x<1$ *et, pour y non nul proche de 0,* $|f(k\pi+\mathrm{i}y)|^2=\mathrm{ch}^2y>1$.

d. Soit $f(x,y)=(x^2-y)(3x^2-y)$. Prouver que la restriction de *f* à toute droite passant par $(0,0)$ possède un minimum en O, mais que *f* ne possède pas de minimum en $(0,0)$. Expliquer ce paradoxe.

Sur la droite $x=0$ *, on a* $f(0,y)=y^2\geq 0$ *; de même, sur la droite* $y=0$ *, on a* $f(x,0)=3x^4\geq 0$ *; enfin, sur la droite* $y=ax$ *avec* $a\neq 0$ *, on a* $f(x,ax)=(x^2-ax)(3x^2-ax)\underset{0}{\sim}a^2x^2\geq 0$. *Puisque* $f(0,0)=0$ *, on en déduit bien que f présente un minimum en* $(0,0)$ *sur toute droite passant par* $(0,0)$ *, mais ce minimum est* ***local*** *(à cause de l'équivalent). Enfin,* $f(x,2x^2)=-x^4<0$ *pour x asse petit, ce qui prouve qu'il existe dans tout voisinage de* $(0,0)$ *des gens dont le f est négatif : f ne présente pas de minimum en* $(0,0)$.

---

9. On définit l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ suivant : $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x>0,\ y>0\right\}$, et l'on cherche les fonctions *f* de classe $\mathcal{C}^1$ sur U vérifiant :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{y}{x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{1+xy}+\dfrac{\alpha}{x}\end{cases}$$

a. Déterminer, grâce à un théorème du cours, la seule valeur du paramètre α pour laquelle *f* peut exister.

A priori, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur *U mais la valeur de ses dérivées partielles prouve qu'en réalité elle y est de classe $\mathcal{C}^2$. Le théorème de Schwarz s'applique donc et affirme que l'on doit avoir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. La seule valeur du paramètre α qui convienne est (tous calculs faits) $\alpha = 1$.*

b. Donner, pour cette valeur de α, une solution du système proposé.

*Une fois encore, attention à la rédaction ! Pour que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{1+xy} - \dfrac{y}{x^2}$, **il suffit** (les Physiciens disent que « cela entraine », ce qui n'est pas justifié) que $f(x,y) = \ln(1+xy) + \dfrac{y}{x} + g(y)$ où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (on s'est contenté de primitiver par rapport à x). Alors $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{1+xy} + \dfrac{1}{x} + g'(y)$ et le choix de $g'(y) = 0$ s'impose naturellement. Finalement, on est certain que $f_0(x) = \ln(1+xy) + \dfrac{y}{x}$ est **une** solution du système.*

c. Donner *toutes* les solutions du système.

Alors, f est solution du système si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f_0}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial (f - f_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial (f - f_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$.

U étant convexe, on peut (d'après le cours) en conclure que cela équivaut à ce que la fonction $f - f_0$ soit constante.

---

11. On considère le « paraboloïde hyperbolique » d'équation $z = xy$.

a. Déterminer l'équation du plan tangent à ce paraboloïde au point (a,b,ab).

On applique directement la « formule » du cours en posant $f(x,y) = xy$. L'équation de ce plan tangent s'écrit :

$$Z - ab = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(X-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(Y-b) = b(X-a) + a(Y-b)\,.$$

b. Déterminer l'intersection de ce plan tangent avec le paraboloïde.

On cherche les points de coordonnées (x,y,z) vérifiant le système :

$$\begin{cases} z = xy \\ z - ab = b(x-a) + a(y-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = xy \\ z = bx + ay - ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = bx + ay - ab \\ z = bx + ay - ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(y-b) = 0 \\ z = bx + ay - ab \end{cases}$$

On obtient donc la réunion des deux ensembles suivants :

$$\begin{cases} x = a \\ z = bx + ay - ab \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = b \\ z = bx + ay - ab \end{cases},$$

qui s'avèrent tous deux être des droites (intersections de deux plans).

---

12. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est *holomorphe* au point $a \in U$ si $\lim\limits_{h \to 0, h \in \mathbb{C}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$. Pour $z = x + \mathrm{i}y \in U$, on note $f(z) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)$, P et Q étant à valeurs réelles.

Prouver que f est holomorphe en a si et seulement si f est différentiable en a avec les conditions (dites « de Cauchy », encore lui !) : $\dfrac{\partial P}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(a)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}(a) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(a)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons f holomorphe au point a, et notons* α *la limite de* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *quand le complexe h tend vers 0. On peut alors écrire* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\alpha+\mathrm{o}(1)$, *ou encore* $\dfrac{f(a+h)-f(a)-\alpha h}{h}\underset{h\to 0}{\to}0$ *; le terme* αh *dépendant linéairement de h, on en déduit,* ***par définition même****, que f est différentiable en a et que sa différentielle y est l'application* $h\mapsto\alpha h$ *. Posons* $\alpha=c+\mathrm{i}d$ *avec* $c,d\in\mathbb{R}$ *.*

Alors, puisque $(1,\mathrm{i})$ *est la base canonique de* $\mathbb{C}$ *, on sait que :*

$$\frac{\partial f}{\partial 1}(a)=\mathrm{d}f(a).1=\alpha=c+\mathrm{i}d \;\text{ et }\; \frac{\partial f}{\partial \mathrm{i}}(a)=\mathrm{d}f(a).\mathrm{i}=\alpha\mathrm{i}=-d+\mathrm{i}c\,.$$

Par ailleurs, $\dfrac{\partial f}{\partial 1}(a)=\dfrac{\partial P}{\partial x}(a)+\mathrm{i}\dfrac{\partial Q}{\partial x}(a)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{i}}(a)=\dfrac{\partial P}{\partial y}(a)+\mathrm{i}\dfrac{\partial Q}{\partial y}(a)$, *d'où les formules demandées en identifiant partie réelle et partie imaginaire.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons f différentiable en a avec les conditions* $\dfrac{\partial P}{\partial x}(a)=\dfrac{\partial Q}{\partial y}(a)$ *et* $\dfrac{\partial P}{\partial y}(a)=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}(a)$*. On peut alors écrire, pour* $h=u+\mathrm{i}v$ $(u,v\in\mathbb{R})$ *:*

$$\begin{aligned}
f(a+h)&= f(a)+df(a).h+\mathrm{o}(|h|)\\
&=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x}(a)u+\frac{\partial f}{\partial y}(a)v+\mathrm{o}(|h|)\\
&=f(a)+\frac{\partial P}{\partial x}(a)u+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}(a)u+\frac{\partial P}{\partial y}(a)v+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial y}(a)v+\mathrm{o}(|h|)\\
&\underset{\text{Cauchy}}{=}f(a)+\frac{\partial P}{\partial x}(a)u+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}(a)u-\frac{\partial Q}{\partial x}(a)v+\mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial x}(a)v+\mathrm{o}(|h|)\\
&=f(a)+(\frac{\partial P}{\partial x}(a)+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}(a))(u+\mathrm{i}v)+\mathrm{o}(|h|)\\
&=f(a)+\alpha h+\mathrm{o}(|h|)\ \text{ avec }\ \alpha=\frac{\partial P}{\partial x}(a)+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}(a).
\end{aligned}$$

On en déduit facilement en divisant que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\underset{h\to 0}{\to}\alpha$ *: f est holomorphe en a.*