Écriture décimale des nombres réels

Le but de ce polycopié est de légitimer l'écriture chiffrée des nombres réels telle qu'on l'utilise quotidiennement. Désormais, l'usage quasi-universel (même les Anglais s'y sont pliés, c'est dire !) veut que l'on écrive les nombres en base 10, à cause des dix doigts de la main bien sûr. Cependant, le nombre 10 n'a en réalité aucune particularité et tous les résultats qui suivent pourraient se démontrer exactement de la même manière en choisissant comme base de numération n'importe quel entier p supérieur ou égal à 2 (la base 2 est utilisée en informatique, la base 12 a souvent été employée, 12 ayant la supériorité sur 10 de posséder plus de diviseurs, mais aussi la base 20, parce que l'on possède également dix doigts de pieds...)

1. Signification de l'écriture décimale

Soit (α_n) une suite d'entiers telle que, pour tout n plus grand que 1, α_n soit compris entre 0 et 9.

Considérons la série $\sum \frac{\alpha_n}{10^n}$:

$$\forall\, n \geq 1,\ 0 \leq \frac{\alpha_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}\text{, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.}$$

La série $\sum \frac{\alpha_n}{10^n}$ est donc convergente. Si x désigne sa somme, x est donc un réel que l'on conviendra d'écrire $x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$

Il peut être intéressant de remarquer d'ores et déjà que cette écriture d'un réel n'est pas nécessairement unique. Prenons en effet $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_n = 9$ pour tout n plus grand que 1. On a alors, par définition même de notre écriture décimale :

$$0{,}99\ldots 9\ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \times \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 = 1{,}00\ldots 0\ldots$$

Ce résultat est souvent présenté à tort comme étant paradoxal, mais il n'en est rien !

2. Existence, pour tout réel positif *x*, d'une écriture décimale de *x*

Il est absolument indispensable, pour bien comprendre ce qui va suivre, de s'efforcer de bien réfléchir (sur un exemple explicite de nombre représenté par son écriture décimale) à ce que sont les quantités que l'on va définir.

Par exemple, envisageons $\pi = 3{,}141592653589\ldots$ Si l'on veut récupérer la valeur approchée de π avec 5 décimales, en l'occurrence $3{,}14159$, il suffit de multiplier π par 100000 (10^5) ce qui donne $100000\pi = 314159{,}2653589\ldots$, de prendre la partie entière (314159) puis de diviser à nouveau par 100000 pour obtenir $3{,}14159$. C'est, avec les notations qui suivront, le nombre A_5. Si maintenant l'on veut juste récupérer la cinquième décimale, ici 9, on l'obtient à l'aide de 314159, de 31415 (que l'on trouve par le même procédé que précédemment, en effectuant l'opération $314159 - 10 \times 31415$: c'est le nombre a_5 que l'on définit plus loin.

Soit x un réel positif fixé.

Posons, pour tout entier positif n, les crochets [ ] désignant bien entendu la partie entière :

$$A_n = \frac{[10^n x]}{10^n},\ B_n = \frac{[10^n x]+1}{10^n} \text{ et enfin, pour } n \geq 1,\ a_n = 10^n(A_n - A_{n-1}).$$

Premier point :

$$[10^n x] \leq 10^n x < [10^n x]+1.$$

Il vient donc, par division par 10^n :

$$A_n \leq x < B_n \Rightarrow 0 \leq x - A_n < B_n - A_n = \frac{1}{10^n}.$$

La suite (A_n) est donc convergente, de limite x.

Second point :

$$\text{Pour tout } n \geq 1,\ a_n = 10^n(A_n - A_{n-1}) = [10^n x] - 10 \times [10^{n-1} x] \in \mathbb{Z}.$$

Troisième point :

Par définition de la partie entière d'un nombre, il vient :

$$[10^{n-1} x] \leq 10^{n-1} x < [10^{n-1} x] + 1.$$

D'où, par multiplication par 10,

$$10 \times [10^{n-1} x] \leq 10^n x < 10 \times [10^{n-1} x] + 10$$

Ainsi, $10 \times [10^{n-1} x]$ est un entier inférieur à $10^n x$, il est donc inférieur à sa partie entière. On en déduit donc les inégalités suivantes :

$$10 \times [10^{n-1} x] \leq [10^n x] \leq 10^n x < 10 \times [10^{n-1} x] + 10$$

$$\Rightarrow 10^n A_{n-1} \leq 10^n A_n < 10^n A_{n-1} + 10$$

$$\Rightarrow 0 \leq 10^n(A_n - A_{n-1}) = a_n < 10.$$

Ainsi, l'entier a_n est compris entre 0 et 9.

Quatrième point :

Il vient, en sommant de 1 à un certain entier N l'égalité $A_n - A_{n-1} = \dfrac{a_n}{10^n}$, et en tenant compte du fait que a_0 et A_0 sont égaux,

$$A_N - A_0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k}$$

d'où l'égalité, valable pour tout entier N :

$$A_N = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k}.$$

Il vient donc, en faisant tendre N vers l'infini :

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Théorème : tout réel positif possède un développement décimal.

3. Existence d'un développement décimal propre

Prouvons que le développement décimal que l'on vient de construire du réel positif x est « propre », c'est-à-dire qu'il n'existe pas de rang N à partir duquel tous les a_n sont égaux à 9.

Si tel n'était pas le cas, il existerait donc un entier N vérifiant : $\forall n \geq N,\ a_n = 9$. On aurait alors :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \\ &= A_N + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \\ &= A_N + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} \\ &= A_N + \frac{9}{10^{N+1}}.\frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\ &= A_N + \frac{1}{10^N} \\ &= B_N \end{aligned}$$

et ceci est impossible puisque l'une des premières inégalités que l'on a obtenues est justement $x < B_n$.

Théorème : tout réel positif possède un développement décimal propre.

4. Unicité du développement décimal propre

Prouvons l'unicité du développement décimal propre.

Écrivons pour cela $x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{10^n}$ où les a_n et les b_n sont, pour n plus grand que 1, des entiers compris entre 0 et 9. Supposons que ces développements soient propres, et que ce ne soient pas les mêmes. On peut alors considérer le plus petit entier N tel que $a_N\neq b_N$.

Pour fixer les idées, on supposera $b_N<a_N$, et donc $b_N\leq a_N-1$. Enfin, les développements considérés étant propres, il ne comportent pas que des 9 à partir d'un certain rang, et donc il existe un entier N_1 strictement plus grand que N tel que $b_{N_1}\neq 9$. Alors,

$$x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{10^n}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{b_n}{10^n}+\frac{b_N}{10^N}+\sum_{n=N+1}^{N_1-1}\frac{b_n}{10^n}+\frac{b_{N_1}}{10^{N_1}}+\sum_{n=N_1+1}^{+\infty}\frac{b_n}{10^n}$$

et si l'on tient compte du fait que les a_n sont égaux aux b_n avant le rang N, que b_{N_1} est strictement plus petit que 9, et que les autres b_k sont inférieurs ou égaux à 9, il vient :

$$\begin{aligned}x&<\sum_{n=0}^{N-1}\frac{b_n}{10^n}+\frac{b_N}{10^N}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{9}{10^n}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{b_n}{10^n}+\frac{b_N}{10^N}+\frac{1}{10^N}\end{aligned}$$

et donc $$x<\sum_{n=0}^{N-1}\frac{a_n}{10^n}+\frac{b_N+1}{10^N}$$

et enfin, puisque $b_N+1\leq a_N$:

$$x<\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{10^n}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}=x$$

On a bien obtenu une contradiction, et l'on peut donc énoncer enfin :

Théorème : Tout nombre réel positif possède un unique développement décimal propre.

5. Caractérisation des rationnels par leur écriture décimal propre

Considérons le réel suivant :

$$x = 0{,}12927927927\ldots927\ldots$$

Il s'agit donc d'un réel dont le développement décimal possède la particularité de devenir périodique. Nous allons voir que x est rationnel, et il n'y aura aucune difficulté à se convaincre que la démonstration dans ce cas particulier se généralise à tout réel dont le développement décimal devient périodique (le choix de traiter un exemple est volontaire : le formalisme de la preuve générale risquerait de cacher la simplicité de l'argumentation).

La séquence 927 étant de longueur 3, et le calcul de $1000x$ la décalant de 3 crans vers la gauche, il vient :

$$1000x - x = 129{,}27927927\ldots - 0{,}12927927927\ldots = 129{,}15\,.$$

Cette ruse de calcul a permis la destruction de la séquence 927. Finalement, on obtient :

$$x = \frac{129{,}15}{999} = \frac{12915}{99900} = \frac{1435}{11100} = \frac{287}{2220}\,,$$

et x est bien rationnel.

Réciproquement, soit $x = \dfrac{p}{q}$ un rationnel positif.

Posons la division de p par q comme on le fait à l'école primaire. On notera, c'est essentiel, qu'il n'y a dans les divisions successives qu'un nombre fini de restes possibles (les entiers de 0 à $q-1$).

Imaginons comment se fait cette division : à chaque étape, on descend un chiffre de p, on fait la division par q, et on recommence. Au bout d'un moment, quand les chiffres de p sont épuisés, on ne descend plus que des 0. Mais comme il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles, il arrivera bien un moment, lors de cette descente de 0, où l'on retrouvera un reste précédemment trouvé. À partir de là, il est évident que le processus boucle : le développement décimal de x devient périodique[1].

On a donc prouvé l'équivalence suivante, qui caractérise les rationnels :

Théorème : un réel positif est rationnel si, et seulement si, son développement décimal propre devient périodique.

6. Une application très importante : la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Un ensemble dénombrable est un ensemble qui est fini ou qui peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ (ou avec $\mathbb{N}^*$). En quelque sorte, un ensemble infini dénombrable est donc un ensemble dont « l'infini est le même que celui de $\mathbb{N}$ ». Bien qu'ils contiennent strictement $\mathbb{N}$, les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables (un polycopié sur les ensembles dénombrables sera donné ultérieurement). Nous allons prouver ici que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, et donc que « l'infini de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$ ».

[1] On peut donner de ce résultat une preuve un peu plus « mathématique », mais celle qui a été choisie ici a le mérite d'être très descriptive.

Pour prouver ce résultat, nous allons prouver que $[0,1[$ n'est pas dénombrable. Alors pour $\mathbb{R}$, ce sera encore pire…

Supposons donc que $\mathbb{N}^*$ puisse être mis en bijection avec $[0,1[$. Soit f une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $[0,1[$.

Soit a_1 la première décimale du développement propre de $f(1)$. Soit a_2 la deuxième décimale du développement propre de $f(2)$. Soit plus généralement a_n la $n^{\text{ième}}$ décimale du développement propre de $f(n)$.

Choisissons un entier b_1 compris entre 0 et 8 et différent de a_1. Choisissons un entier b_2 compris entre 0 et 8 et différent de a_2. Plus généralement, choisissons un entier b_n compris entre 0 et 8 et différent de a_n.

Construisons à présent le nombre dont le développement décimal (propre puisque l'on a bien pris soin de prendre des b_k tous différents de 9) est le suivant : $x = 0,b_1 b_2 \dots b_n \dots$

Le nombre x est un élément de $[0,1[$, différent de $f(1)$ puisqu'ils n'ont pas la même première décimale, différent de $f(2)$ puisqu'ils n'ont pas la même seconde décimale, et plus généralement différent pour tout entier n de $f(n)$ puisqu'ils n'ont pas la même $n^{\text{ième}}$ décimale. Bref, x n'est pas le f de quelqu'un, f n'est donc pas surjective : contradiction.

Théorème : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

7. Et pour finir…

Savez-vous que l'on connaît à l'heure actuelle plus de dix mille milliards de décimales de π ? Pour vous donner une petite idée, sachez que si vous vouliez les énumérer toutes, à raison d'une décimale par seconde, il vous faudrait… un peu plus de trois cent mille ans (vous fêterez votre anniversaire d'un milliard de secondes à 31 ans et huit mois) ! Et vous mesurerez sans doute l'utilité pratique d'une telle connaissance en sachant que, pour calculer la longueur d'un cercle dont le diamètre est dix mille fois celui de notre univers connu avec une erreur inférieure au diamètre d'un atome d'hydrogène, on a besoin de… 40 décimales exactes de π !

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620\ldots$$

(pour les curieux, je tiens le premier millier de décimales à leur disposition).