ESPACES EUCLIDIENS (1)

1. **a.** Nature de la transformation géométrique de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8&-1&4\\4&4&-7\\1&-8&-4\end{pmatrix}.$$

b. On se donne trois réels a, b, c vérifiant $a^2+b^2+c^2=1$. Déterminer la nature de la transformation géométrique de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\begin{pmatrix}a^2&ab-c&ac+b\\ab+c&b^2&bc-a\\ac-b&bc+a&c^2\end{pmatrix}.$$

c. Écrire la matrice de la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe dirigé positivement par $(1,-1,1)$.

---

2. **a.** Compléter la matrice A suivante pour que ce soit une matrice orthogonale négative, et décrire la transformation de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté dont A est la matrice dans la base canonique :

$$A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6&3&.\\-2&6&.\\3&.&.\end{pmatrix}$$

b. À quelle condition (C) sur les réels a, b et c la matrice A suivante est-elle une matrice d'isométrie ?

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}.$$

Déterminer géométriquement le lieu des points de l'espace de coordonnées (a,b,c) vérifiant la condition (C).

(c.) À quelle condition supplémentaire A est-elle une matrice de rotation ? Montrer que cette condition équivaut à ce que a, b et c soient les racines d'un polynôme de la forme $X^3-X^2+\lambda$ avec $\lambda\in[0,\frac{4}{27}]$. Déterminer alors l'axe et l'angle de cette rotation.

---

3. Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ une matrice orthogonale. Prouver que $\left|\sum_{i,j}a_{i,j}\right|\leq n$ (introduire le vecteur S dont les coordonnées sont toutes égales à 1 dans une base orthonormée). Cette majoration est-elle la plus fine possible ?

4.* Soit E un espace euclidien de dimension n. Prouver par récurrence qu'il est impossible de trouver $n+2$ vecteurs x_i dans E vérifiant $\forall i\neq j,\ (x_i|x_j)<0$ Interprétation géométrique ?

---

5. Soit A une matrice carrée symétrique réelle d'ordre n, telle que $\exists k\geq 2,\ A^k=I_n$. Prouver que $A^2=I_n$.

6. Soit E l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$.

a. Soit a un vecteur de A. Prouver que l'application $x \mapsto a \wedge x$ est un endomorphisme antisymétrique de E.

b. Réciproquement, prouver que pour tout endomorphisme antisymétrique u de E, il existe un vecteur b unique tel que $u(x) = b \wedge x$ pour tout x de E.

---

7. Soit u une isométrie d'un espace euclidien E. On pose $v = Id - u$.

a. Prouver que $\ker v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$. À quoi qu'ça peut bien servir d'savoir ça ?

b. En déduire, pour x élément de E, la limite de la suite (m_n) définie par $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$.

c. Interprétation géométrique ?

---

8. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien de matrice A dans une base orthonormée de E, et v l'endomorphisme de matrice ${}^tA$ dans cette même base orthonormée.

a. Prouver que $\forall\, x, y \in E,\ (u(x) | y) = (x | v(y))$, puis que v est l'unique endomorphisme de E possédant cette propriété.

b. Déterminer v (que l'on appelle *l'adjoint* de u) quand u est un projecteur orthogonal, puis une isométrie.

c. Déterminer le noyau et l'image de v en fonction de ceux de u.

9.* Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. prouver l'existence d'une base orthonormée de E que u transforme un famille orthogonale.

10.* Soit E un espace euclidien, A une partie *convexe* et fermée de E, et x_0 un point de E.

a. Prouver que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à un point x associe la distance de x à A est 1-lipschitzienne.

b. Prouver que la distance de x_0 à A est atteinte.

c. Soient deux points a et b de A qui réalisent la distance de x_0 à A, et $m = \dfrac{a+b}{2}$ leur milieu. En utilisant l'identité du parallélogramme, prouver que $a = b$. Conclusion ?

---

11. Soit u une isométrie d'un espace euclidien de dimension n.

a. Prouver que si u est négative, -1 est valeur propre de u.

b. Prouver que si u est positive et n impair, 1 est valeur propre de u.

c. En considérant $v = u + u^{-1}$, retrouver le résultat prouvé dans le cours selon lequel u possède une droite ou un plan stable.

---

12. Soit f une isométrie d'un espace euclidien E. Prouver que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $f \circ f = -Id_E$;

ii. pour tout x de E, x et $f(x)$ sont orthogonaux ;

iii. f est antisymétrique.

ESPACES EUCLIDIENS (2)

Familles équiangulaires

On fixe un espace euclidien E de dimension n. Une famille $(x_1,\dots,x_p)$ de p vecteurs *normés* de E sera dite « équiangulaire » si :

$$\exists\gamma\in\,]0,1[\ \text{ tel que }\ \forall\, i,j\in[[1,p]]\,,\ i\neq j\Rightarrow\left|(x_i\,|\,x_j)\right|=\gamma\,.$$

Elle sera dite « équiangulaire aiguë » si :

$$\exists\gamma\in\,]0,1[\ \text{ tel que }\ \forall i,j\in[[1,p]]\,,\ i\neq j\Rightarrow(x_i\,|\,x_j)=\gamma\,.$$

Le réel γ sera dit « rapport » de la famille équiangulaire (ou de la famille équiangulaire aiguë).

1. **a.** Donner, dans le plan euclidien, un exemple de famille équiangulaire comportant trois vecteurs.

b. Calculer le déterminant de la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & (\gamma) & \\ & (\gamma) & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Prouver que toute famille équiangulaire aiguë est libre.
Est-ce le cas des familles équiangulaires ?

2. Soit $\gamma\in\,]0,1[$. On se propose de prouver l'existence d'une famille équiangulaire aiguë $(x_1,\dots,x_n)$ de n vecteurs de E (on rappelle que n est la dimension de E) et de rapport γ.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E, et $S=e_1+e_2+\dots+e_n$. Chercher les vecteurs x_i sous la forme $x_i=ae_i+bS$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

3. L'objet de cette question est de majorer le nombre de vecteurs pouvant constituer une famille équiangulaire.
Pour ce faire, on fixe une famille équiangulaire $(x_1,\dots,x_p)$ de rapport γ.

a. Prouver que l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, donner sa dimension et prouver que les projecteurs orthogonaux sont des éléments de $\mathcal{S}(E)$.

b. Prouver que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}(E)$ en posant $\langle u\,|\,v\rangle=\operatorname{tr}(u\circ v)$.

c. Pour $k\in[[1,p]]$, on note p_k la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur x_k.

Calculer $\langle p_i\,|\,p_j\rangle$ (on pourra, pour $i\neq j$, écrire les matrices de p_i et de p_j dans une base de la forme $(x_i,x_j,e_3,\dots,e_n)$ où $(e_3,\dots,e_n)$ forment une base orthonormée de $\operatorname{vect}(x_i,x_j)^{\perp}$).

d. Donner un majorant de p en fonction de n.

4. Prouver, pour une valeur de γ que l'on déterminera, l'existence d'une famille équiangulaire de $n+1$ vecteurs de rapport γ (on reprendra l'idée de la question **2.**).