ALGÈBRE LINÉAIRE (1)

1. Dans $\mathbb{R}$ considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, prouver l'indépendance des vecteurs 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{2}$. Prouver dans ce même espace la liberté de la famille $(\ln p)_{p \text{ premier}}$.

2. Soit $\mathbb{K}$ un corps strictement compris entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ au sens de l'inclusion. Prouver que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on en conclure ? Donner un exemple de corps intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

3.* Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Prouver que E peut être muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel prolongeant celle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel si et seulement s'il existe u dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ u = -Id_E$. Est-ce le cas pour $\mathbb{R}[X]$?

4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Déterminer tous les couples d'endomorphismes (u,v) de E tels que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$.

5. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Prouver que l'on peut, de façon naturelle, munir E d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Prouver que si le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est de dimension finie égale à n, alors le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est de dimension finie égale à $2n$.

6. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = Id_E$.

a. Démontrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$.

b. Démontrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

c. Démontrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

7. Étudier la liberté des familles suivantes :

a. Dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille $\left(f_\alpha\right)_{\alpha>0}$ avec $f_\alpha : x \mapsto \alpha^x$.

b. Dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille $\left(f_a\right)_{a\in\mathbb{R}}$ avec $f_a : x \mapsto |x-a|$.

e. Étant donnés n réels deux à deux distincts $a_1,\ldots,a_n$ et un entier non nul k, la famille de polynômes $\left((X-a_1)^k,\ldots,(X-a_n)^k\right)$.

8. Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tels que $p \circ q = 0$. Prouver que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur, et déterminer son noyau et son image.

9. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Prouver l'équivalence :

$$Id + f \circ g \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow Id + g \circ f \in \mathcal{GL}(E).$$

Donner alors une expression de l'inverse de $Id + g \circ f$ faisant intervenir l'inverse de $Id + f \circ g$.

10. Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie E.

a. Prouver que $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

b. Prouver que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

c. Prouver que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.

11. **a.** Prouver que la réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.

b. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, A et B deux sous-espaces de E distincts de E. Prouver que la réunion de A et de B n'est pas égale à E. En déduire, par récurrence sur $n-p$, que deux sous-espaces de dimension p possèdent un supplémentaire commun.

12.* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f et g deux endomorphismes de E. Prouver, en complétant une base de $\operatorname{Ker} f$ en base de E, que :

$$\ker f \subset \ker g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = h \circ f .$$

13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et A et B deux sous-espaces de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe u élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\ker u = A$ et $\operatorname{Im} u = B$. Supposant cette condition réalisée, on note $G = \left\{u \in \mathcal{L}(E)\ /\ \ker u = A \text{ et } \operatorname{Im} u = B\right\}$. Prouver que G, muni de la loi $\circ$, est un groupe si et seulement si $E = A \oplus B$.

14. Prouver que le polynôme $X^3 + X + 1$ possède une unique racine réelle a, et que $a \notin \mathbb{Q}$. Prouver la liberté de la famille $(1, a, a^2)$ (on envisagera une combinaison linéaire nulle de ces trois réels, et on effectuera la division euclidienne de $X^3 + X + 1$ par un bon polynôme).

15. Soient u et v deux endomorphismes d'un même espace de dimension finie E. Prouver que l'on a :

$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - \dim E \le \operatorname{rg}(v \circ u) \le \inf(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)).$$

Pour l'inégalité de gauche, on pourra raisonner sur la restriction de v à $\operatorname{Im} u$.

16. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

17. L'espace dans lequel on se place est $E = \mathbb{R}^4$, dont on note $e = (i, j, k, l)$ la base canonique.

Avis : cet exercice est très fondamentalement primaire ! Son objectif est de vous forcer à réfléchir pour avoir les démonstrations les plus efficaces possibles, grâce au cours d'Algèbre linéaire.

On envisage l'ensemble $A = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ /\ x + y + z + t = 0\right\}$.

a. Prouver que A est un sous-espace vectoriel de E, en donner la dimension ainsi qu'une base.

b. Soit x_0 le vecteur $(1, -1, 0, 1)$. Prouver que $E = A \oplus \mathbb{R}x_0$.

c. Donner l'image du vecteur i par la projection sur A parallèlement à $\mathbb{R}x_0$. Donner de même l'image du vecteur i par la projection sur $\mathbb{R}x_0$ parallèlement à A.

d. Soit u l'endomorphisme de E tel que ;

$$u(i) = i - j \ ,\ \ u(j) = i + j - k - l \ ,\ \ u(k) = -i + j \ ,\ \ u(l) = j + k - 2l .$$

Prouver que $\operatorname{Im} u = A$. Que vaut le noyau de u ? Résoudre l'équation $u(X) = (0, 1, -1, 0)$.

e. L'application v suivante, de A dans $\mathbb{R}^3$, est-elle injective, surjective ? :

$$\forall X = (x, y, z, t) \in A, \quad v(X) = (x + y + t, 2x - y, z - t) .$$

Déterminer la matrice de cette application dans la base de A qui a été choisie à la question **a.**

18. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a. Prouver que $Id_E + u$ est inversible, et déterminer son inverse.

b. Prouver l'existence d'un vecteur a de E tel que la famille $(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a))$ soit libre.