SÉRIES ENTIÈRES

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum \ln n z^n$ **b.** $\sum n^{(-1)^n} z^n$ **c.** $\sum \binom{3n}{n} z^n$ **d.** $\sum n!\, z^{n!}$ **e.** $\sum \cos n\, z^n$

f. $\sum \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) z^n$ **g.** $\sum [e^n] z^n$ **h.** $\sum \cos(n\frac{\pi}{17}) z^{3n+1}$ **i.** $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{z^n}{n!}$ **j.** $\sum \frac{\sin n}{n^2} z^n$

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :

a. a_n est le nombre de diviseurs de l'entier non nul n.

b. a_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de e.

c. a_n est le nombre de chiffres de l'écriture en base 7 de $n!$.

d. on a $0 \le \alpha_n \le |a_n| \le \beta_n$, et les deux séries entières $\sum \alpha_n z^n$ et $\sum \beta_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

3. On se donne une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries entières suivantes ? :

a. $\sum a_n z^{3n+1}$ **b.** $\sum \frac{a_n}{n^\pi + \ln n + 1} z^n$ **c.** $\sum a_n^2 z^n$ **d.** $\sum a_n \frac{z^n}{n!}$ (en supposant $R \neq 0$)

4. Rayon de convergence et somme des séries entières suivantes :

a. $\sum n^2 z^n$ **b.** $\sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **c.** $\sum \frac{z^{3n}}{(3n)!}$

d. $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ **e.** $\sum \sin(n\theta) z^n$ **f.** $\sum \frac{n^3 - 2n^2 + 3n - 2}{n!} z^n$

g. $\sum \frac{x^n}{(2n+1)!}$ **h.** $\sum a_n z^n$ où a_n est le $n^{\text{ème}}$ chiffre de l'écriture décimale de 5/12.

5. Convergence d'une suite au sens de Borel

Soit (a_n) une suite de complexes convergeant vers l. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n \frac{z^n}{n!}$. On note $S(z)$ sa somme. Déterminer la limite, quand x réel tend vers $+\infty$, de $e^{-x} S(x)$. Réciproque ?

6. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, et de somme $s(z)$. On note $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum S_n z^n$.

(7.) Théorème d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, telle que la série $\sum a_n$ converge. Prouver que la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur [0,1] (on écrira $a_n = R_{n-1} - R_n$ avec $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$). Que peut-on en déduire ?

Application : on se donne deux séries de complexes convergentes. Prouver que si leur série produit de Cauchy converge, sa somme ne peut qu'être égale au produit des sommes.

8. Soit p un entier non nul et (a_n) une suite de complexes non nuls vérifiant $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{a_{n+p}}{a_n} = l \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

9. On recherche les fonctions f de classe C^1 de **R** dans **R** telles que pour tout x de **R**, on ait $f'(x) = f(\lambda x)$.

a. Prouver qu'une telle fonction, si elle existe, est de classe C^∞, et déterminer $f^{(n)}$ pour tout entier n.

b. On suppose λ dans]–1,1[. Prouver, grâce à une formule de Taylor, que f est développable en série entière sur **R**. Prouver dans ce cas que l'équation fonctionnelle étudiée possède des solutions.

10. Développer (si possible !) en série entière autour de 0 les fonctions suivantes :

a. $\ln\left(1 - 2x\cos\alpha + x^2\right)$ **b.** $\arcsin x$ **c.** $\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ **d.** $\mathrm{arctg}(x+1)$

e. $\dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{1+x+x^2}$ **f.** $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$ **g.** $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ **h.** $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\cos t)\mathrm{d}t$

11. **a.** Prouver que l'application $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$, convenablement prolongée en 0, est de classe C^∞ sur **R**.

En déduire que l'application $g : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$, convenablement prolongée en 0, est de classe C^∞ sur **R**.

b. On désire maintenant prouver que g est développable en série entière sur]–1,1[. Prouver que si g est somme de la série entière $\sum a_n x^n$ sur $]-h, h[$ (h non nul), alors les a_n satisfont aux formules de récurrence :

$$(S) : \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n + \dfrac{a_{n-1}}{2!} + \ldots + \dfrac{a_0}{(n+1)!} = 0 \ \ \forall n > 0. \end{cases}$$

c. Prouver que le "système infini" (S) possède une unique suite solution (α_n) et que l'on a pour tout n : $|\alpha_n| \leq 1$.

d. Conclure soigneusement.

12. Chercher les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes :

a. $xy'' + y' + xy = 0$. **b.** $4xy'' + 2y' - y = 0$. **c.** $(1-x)x^2y'' - x(1+x)y' + y = 0$.

13. On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Prouver que pour tout réel $r > 0$, il existe un entier positif q ayant la propriété suivante : pour tout $n \geq q$, toutes les racines complexes de P_n sont de module supérieur à r.

14. Prouver que la version trigonométrique du théorème de Stone-Weierstrass entraîne la version usuelle de ce théorème.

15. Développer en série entière $\sqrt{1+x}$ pour x réel élément de]–1,1[. On note $\sum a_n x^n$ ce développement. Calculer, pour z complexe de module strictement plus petit que 1, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^2$. À laquelle des deux racines carrées du complexe $1+z$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est-elle égale ?