Toutes les matrices envisagées dans ce problème sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $n \geq 2$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, "l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A" désigne l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\mathrm{Rac}(A) = \left\{R \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ / \ R^2 = A\right\}$ l'ensemble de ses "racines carrées".

Généralités et premiers exemples.

1. Pour tout réel α, on envisage la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ suivante : $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$.

a. Calculer ${A_\alpha}^2$.

b. Étant donnée une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, l'ensemble $\mathrm{Rac}(A)$ est-il toujours une partie finie de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$?

2. Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbf{R}^n$, que l'on suppose nilpotent. On note p "l'indice de nilpotence de u", c'est-à-dire le plus petit des entiers k tels que $u^k = 0$.

a. Prouver l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$, et prouver que la famille $\left(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a)\right)$ est libre.

b. En déduire que $p \leq n$ puis que $u^n = 0$.

c. Soit la matrice N suivante de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, et n son endomorphisme canoniquement associé :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prouver que n est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

On suppose qu'il existe un endomorphisme r de $\mathbf{R}^3$ tel que $r^2 = n$. Prouver que r est nilpotent. En considérant r^4, prouver que $\mathrm{Rac}(N)$ est vide.

3. Soit A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver que pour que $\mathrm{Rac}(A)$ soit non vide, il est nécessaire que le déterminant de A soit un réel positif ou nul.

Réciproque ?

4. Soit A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et $R \in \mathrm{Rac}(A)$.

Prouver que A et R commutent.

5. On note D la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ suivante :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

a. Donner (en raisonnant "à la main" !) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ commute avec D.

b. Quelle est la forme nécessaire d'une racine carrée de D ?

Déterminer *toutes* les racines carrées de D. Combien y-en a-t-il ?

6. En adaptant la démarche suivie dans la question **5.**, prouver que la matrice Δ suivante ne possède pas de racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang $n-1$, R une racine carrée de A, a et r leurs endomorphismes canoniquement associés.

a. Prouver que le noyau de r est inclus dans le noyau de a, et que r ne saurait être inversible.

b. En déduire que a et r ont même noyau.

c. Prouver que a et r ont même image.

Exemple 1 : cas des matrices 2-2 non inversibles.

8. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Vérifier que l'on a la relation $M^2 - \mathrm{tr}(M)\,M + \det(M)\,I_2 = 0$.

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ supposée non inversible, et R une racine carrée éventuelle de A.

a. Calculer $\det(R)$.

b. En déduire une condition nécessaire portant sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que R existe.

c. On suppose en outre que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. Prouver que R est proportionnelle à A.

10. On envisage $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Rac}(A)$.

Exemple 2 : cas où $A = I_n$.

11. Soit R une racine carrée de la matrice unité I_n.

a. Vérifier que R est une matrice inversible.

Comment nomme-t-on l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à R ?

b. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.

12. Déterminer $\mathrm{Rac}(I_n)$.

Exemple 3 : cas où A est la matrice nulle.

13. Soit R une racine carrée de la matrice nulle, et r l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à R. On note p le rang de r.

a. Comparer $\mathrm{Im}\, r$ et $\mathrm{Ker}\, r$ puis montrer que $p \leq \frac{n}{2}$.

b. On suppose r non nul, donc $p \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}\, r$ que l'on complète avec $(e_{p+1}, \ldots, e_{n-p})$ pour former une base de $\mathrm{Ker}\, r$. Pour $i = 1, \ldots, p$, on note u_i un vecteur tel que $r(u_i) = e_i$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-p}, u_1, \ldots, u_p)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, et écrire la matrice M_p de r dans cette base.

14. Déterminer *toutes* les racines carrées dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la matrice nulle.

Exemple 4 : cas où $A = I_n + N$ avec N nilpotente.

15. **a.** Développer en série entière, pour x réel élément de $]-1,1[$, la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$; on notera $\sum a_n x^n$ la série entière ainsi obtenue.

b. On pose, pour tout entier n, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

Prouver que $c_0 = c_1 = 1$, et que $\forall n \geq 2,\ c_n = 0$.

16. Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et $A = I_n + N$.

On pose $R = \sum_{k=0}^{n} a_k N^k$. Calculer R^2.

17. Expliciter une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ dont le carré est égal à $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemple 5 : cas où $A = -I_n$.

18. **a.** Prouver que pour que la matrice $-I_n$ ait des racines carrées, il est nécessaire que l'entier n soit pair.

b. Prouver que pour $n = 2$, la matrice $-I_2$ possède effectivement des racines carrées (on pourra raisonner géométriquement, en cherchant une transformation plane dont le carré est $-Id$).

c. En déduire que pour n pair, $-I_n$ possède des racines carrées (on pourra exhiber une telle racine carrée sous forme d'une matrice diagonale par blocs, en utilisant la question **18.b.**).

19. Soit n un entier pair non nul ($n = 2p$), et f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que $f^2 = -Id$.

On construit par récurrence une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ de la façon suivante : on choisit un vecteur non nul e_1, et on pose $\varepsilon_1 = f(e_1)$. Supposons alors construits, pour $k < p$, les vecteurs $e_1, \varepsilon_1, \ldots, e_k, \varepsilon_k$. Cette famille ayant un cardinal strictement plus petit que n, il est possible de choisir un vecteur e_{k+1} qui ne soit pas dans $\operatorname{vect}\{e_1, \varepsilon_1, \ldots, e_k, \varepsilon_k\}$. On pose alors $\varepsilon_{k+1} = f(e_{k+1})$. On répète alors ce processus jusqu'à construire ainsi une famille $(e_1, \varepsilon_1, \ldots, e_p, \varepsilon_p)$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$.

a. Prouver que la famille $(e_1, \varepsilon_1, \ldots, e_p, \varepsilon_p)$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

b. Écrire la matrice de f dans cette base.

c. En déduire la forme générale des matrices carrées R telles que $R^2 = -I_n$.