On désigne par E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n ($n \geq 2$), I désigne l'application identité de E.

Un endomorphisme u de E est dit "nilpotent" s'il existe un entier k tel que $u^k = 0$, 0 désignant l'endomorphisme nul de E. On définit de manière analogue une matrice carrée nilpotente.

0. Démontrer les résultats classiques sur les noyaux itérés, à savoir que si v est un endomorphisme de E, les noyaux N_k des v^k (pour k entier positif) croissent au sens de l'inclusion, qu'il existe un entier r tel que $N_r = N_{r+1}$, et que si $N_p = N_{p+1}$, alors $\forall q \geq p, N_q = N_p$.

Énoncer des résultats analogues concernant les images I_k des v^k.

Prouver que si n désigne la dimension de E, on a $E = \mathrm{Ker} v^n \oplus \mathrm{Im} v^n$.

Partie I

(Propriétés élémentaires des endomorphismes nilpotents)

1. Soit u un endomorphisme non nul de E, que l'on suppose nilpotent. On note p "l'indice de nilpotence de u", c'est-à-dire le plus petit des entiers k tels que $u^k = 0$.

a. Prouver l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.

b. Prouver que la famille $\left(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a)\right)$ est libre.

c. En déduire que $p \leq n$ et que $u^n = 0$.

d. <u>Application</u>

On désigne par n l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prouver que n est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

On suppose qu'il existe un endomorphisme r de $\mathbf{C}^3$ tel que $r^2 = n$. Prouver que r est nilpotent, et justifier que la considération de r^4 conduit à une contradiction.

2. Soit u un endomorphisme de E.

Prouver que s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, alors u est nilpotent.

On <u>admettra</u> dans la suite que la réciproque est exacte, à savoir que tout endomorphisme nilpotent possède, dans une bonne base, une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.

3. <u>Application de la question 2.</u>

Soient u et n deux endomorphismes de E tels que :

i. n est nilpotent ;

ii. u et n commutent ($u \circ n = n \circ u$)

Il s'agit de prouver que $\det(u+n) = \det(u)$.

a. On suppose dans cette question que u est inversible.

Prouver que u^{-1} et n commutent, puis que $u^{-1} \circ n$ est nilpotent. En déduire la valeur de $\det(I + u^{-1} \circ n)$, puis le résultat énoncé.

b. On suppose dans cette question que u n'est pas inversible.

Prouver que le noyau de u est stable par n, et que si n' désigne la restriction de n au noyau de u, alors n' est nilpotent. En déduire l'existence d'un vecteur a non nul tel que $u(a) = n(a) = 0$, puis conclure.

Partie II

(Représentation matricielle des endomorphismes nilpotents en dimension 2 et 3)

On fixe dans toute cette partie un endomorphisme u de E, que l'on suppose nilpotent et non nul.

1. On suppose dans cette question que $n = \dim E = 2$.

a. En considérant un vecteur a tel que $u(a) \neq 0$ et en utilisant les résultats de la question **I.1.**, prouver l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Que peut-on dire de deux matrices 2-2 nilpotentes et non nulles ?

2. On suppose dans cette question que $n = \dim E = 3$.

a. Prouver que le rang de u vaut 1 ou 2.

b. On suppose que u est de rang 1.

Donner les dimensions des noyaux de u et de u^3. En déduire que l'indice de nilpotence de u est égal à 2 (penser aux noyaux itérés).

Prouver alors l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. On suppose que u est de rang 2.

Prouver que $u^2 \neq 0$. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. <u>Exemple</u>

On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Déterminer simplement, et à peu de frais, un scalaire λ tel que $v = u - \lambda I$ soit nilpotent.

b. Déterminer une base de $\mathbf{C}^3$ dans laquelle la matrice de v est l'une des deux matrices M ou N.

c. En déduire un mode de calcul de la matrice U^k pour k élément de $\mathbf{N}$.

Partie III

(endomorphismes nilpotents de rang $n-1$)

On revient au cas général où E est de dimension n quelconque, et on fixe un endomorphisme nilpotent u de rang $n-1$. On pose, pour $k \in [[0, n]]$, $N_k = \operatorname{Ker} u^k$ et $n_k = \dim N_k$.

1. Montrer que $\forall k \in [[0, n-1]], N_k \subset N_{k+1}$ et $u(N_{k+1}) \subset N_k$.

2. En considérant l'application $\varphi : \begin{cases} N_{k+1} \to N_k \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$, montrer que $\forall k \in [[0, n-1]], n_{k+1} \leq n_k + 1$.

3. En déduire que l'indice de nilpotence de u vaut n.
Quelle matrice triangulaire supérieure très simple peut-on trouver pour u dans une bonne base de E ?

Partie IV

(Dilatations et transvections)

On désigne par $GL(\mathrm{E})$ le groupe linéaire de E.

u désigne un élément de $GL(E)$ pour lequel l'ensemble des vecteurs de E invariants par u, autrement dit $\mathrm{Ker}(u-I)$, est un hyperplan.

1. **a.** Écrire la matrice de u relativement à une base dont les $n-1$ premiers vecteurs sont dans $\mathrm{Ker}(u-I)$. En déduire l'égalité : $\det(u)=\mathrm{tr}(u)-(n-1)$.

b. On note $a=\det(u)$. Prouver que si a est différent de 1, il existe un vecteur non nul x_0 tel que $u(x_0)=ax_0$. En déduire dans ce cas l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

On dit alors que u est une dilatation, et le nombre a, égal au déterminant de u, s'appelle le rapport de cette dilatation. Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand le déterminant de u vaut 1, on dit que u est une transvection.

2. Montrer que l'application réciproque d'une dilatation est une dilatation dont on précisera le rapport, et que l'application réciproque d'une transvection est une transvection.

3. On désigne par H le noyau de $u-I$.

En utilisant encore une représentation matricielle, déterminer l'image de $u-I$, et montrer qu'elle est incluse dans H si, et seulement si, u est une transvection. Dans ce dernier cas, déterminer une base de E relativement à laquelle la matrice de u a tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale et celui de la $(n-1)^{\text{ième}}$ ligne et de la $n^{\text{ième}}$ colonne, lesquels sont égaux à 1.

4. Soit H un hyperplan de E, et soient x et y deux éléments distincts de E, tels que $x\notin H$ et $y-x\in H$. Montrer qu'il existe une transvection t et une seule telle que :

$$H=\mathrm{Ker}(t-I)\quad\text{et}\quad y=t(x).$$